سلام

حد و پیوستگی

فایل رنگی

Be your own HERO

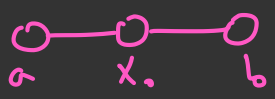
همسایگی: بازه‌ای باز که شامل x_0 باشد را همسایگی x_0 گویند.

$x_0 \in (a,b)$

همسایگی x_0

مثال: $(-1,2)$ یک همسایگی برای $x=1$

$(a,b)-\{x_0\}=(a,x_0)\cup(x_0,b)$



همسایگی محذوف x_0

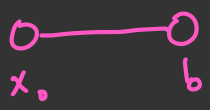
مثال: $(-1,2)-\{1\}$ یک همسایگی محذوف برای $x=1$

(a,x_0)

همسایگی چپ x_0

مثال: $(-1,1)$ یک همسایگی چپ برای $x=1$

(x_0,b)



همسایگی راست x_0

مثال: $(1,2)$ یک همسایگی راست برای $x=1$

اگر $(2x+y,3)\cup(z,2x-4y)$ یک همسایگی محذوف عدد ۲- باشد آن‌گاه بازه (x,y) همسایگی برای کدام عدد زیر است؟

$(-1,0)$

۱) صفر

۲) $\frac{1}{16}$

۳) $\boxed{-\frac{1}{8}}$

۴) $-\frac{3}{2}$

$-\frac{1}{8}\in(-1,0)$

$$(z, 2x-4y) \cup (2x+y, 3) = (z, -2) \cup (-2, 3)$$

$$\begin{cases} 2x-4y=-2 \\ 2x+y=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x+4y=2 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$$

$$5y=0 \qquad y=0 \qquad x=-1$$

میل کردن: یعنی خیلی خیلی نزدیک شدن $x \longrightarrow a$ یعنی x به a خیلی خیلی نزدیک می‌شود اما به آن نمی‌رسد یا به عبارتی فاصله‌ی x با a به صفر نزدیک می‌شود.

$x \longrightarrow a^+$ $\qquad x > a$ $\qquad$ x از راست به a میل می‌کند

$x \longrightarrow a^-$ $\qquad x < a$ $\qquad$ x از چپ به a میل می‌کند

وقتی می‌گوییم x به a میل می‌کند یعنی هم از چپ به a میل می‌کند هم از راست یعنی:

$$x \longrightarrow a \begin{cases} x \longrightarrow a^+ \\ x \longrightarrow a^- \end{cases}$$

حد: اگر (a,b) برای x_0 همسایگی باشد و در تابع $f(x)$ داشته باشیم $(a,b) \in D_{f(x)}$ آنگاه:

$$L^+ \begin{cases} x \longrightarrow x_0^+ \\ f(x) \longrightarrow L_1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$$

حد راست تابع $f(x)$ در $x = x_0$

$$L^- \begin{cases} x \longrightarrow x_0^- \\ f(x) \longrightarrow L_2 \end{cases} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$$

حد چپ تابع $f(x)$ در $x = x_0$

اگر حد چپ و راست تابع $f(x)$ در $x = x_0$ با هم برابر باشند، می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = x_0$ حد دارد و مقدار آن برابر همان حد چپ و راست است.

اگر $L^+ = L^-$ ⟶ حد دارد $x = x_0$ در $f(x)$ ⟶ $L^+ = L^- = L$

$$L \begin{cases} x \longrightarrow x_0 \\ f(x) \longrightarrow L \end{cases} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

حد تابع $f(x)$ در $x = x_0$

پس داریم: $\lim_{\triangle \to \text{⬡}} \bigcirc = \text{▭}$ اگر $\triangle$ به ⬡ میل کند، $\bigcirc$ هم به ▭ میل می‌کند.

$\boxed{\text{حد راست = حد چپ = حد}}$ $\boxed{\text{حد تابع ربطی به مقدار تابع ندارد}}$

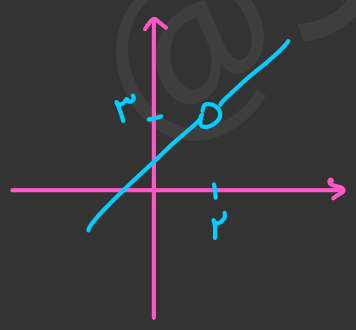
---

۳ حالت داریم

$\boxed{1}$ $f(a)$ موجود نباشد

$\boxed{2}$ $f(a)$ موجود باشد ولی $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

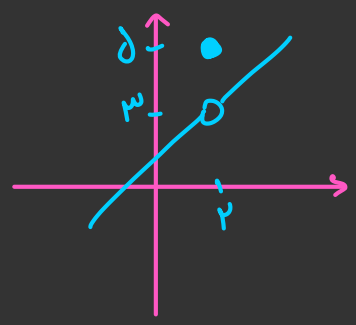
$\boxed{3}$ $f(a)$ موجود باشد و $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



حالت $\boxed{1}$

$f(2) =$ تن

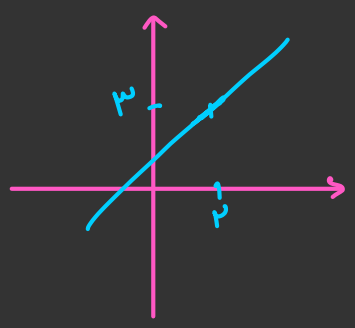
$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$



حالت $\boxed{2}$

$f(2) = 5$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$



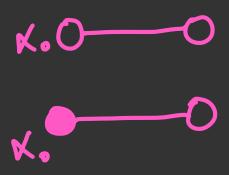
حالت $\boxed{3}$

$f(2) = 3$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

۳ مدل نقطه روی نمودار داریم :

نقطه ابتدایی

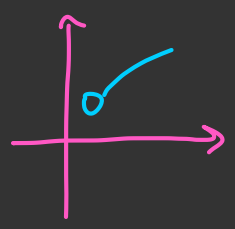


⇓

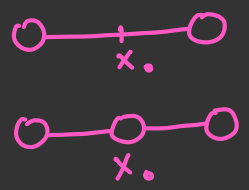
می‌تواند L^+ داشته باشد

⇓

حد ندارد



نقطه میانی



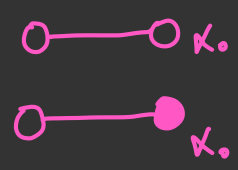
⇓

می‌تواند L^+ و L^- داشته باشد

⇓

می‌تواند حد داشته باشد

نقطه انتهایی

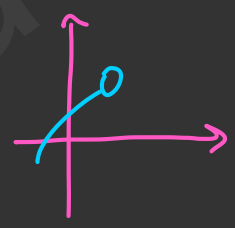


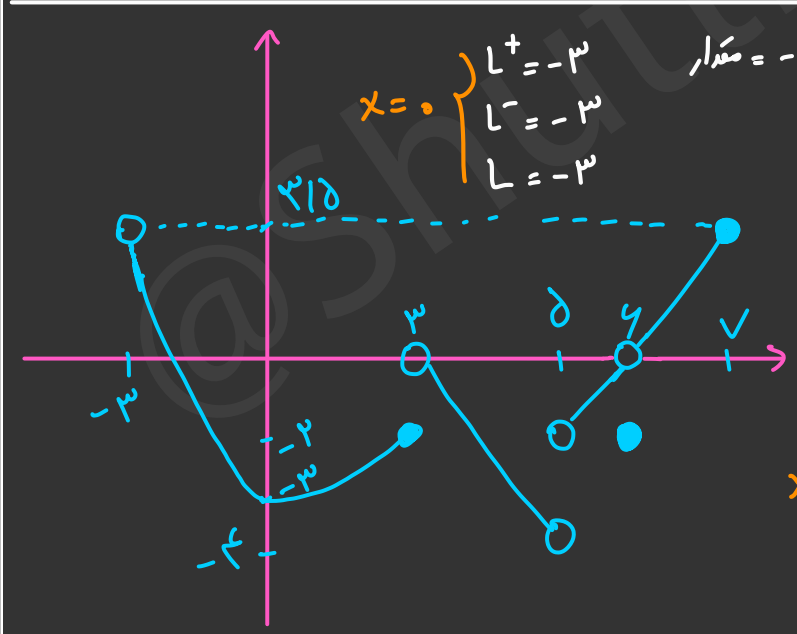
⇓

می‌تواند L^- داشته باشد

⇓

حد ندارد





$x=0$: $L^+=-3$، $L^-=-3$، $L=-3$، مقدار $=-3$

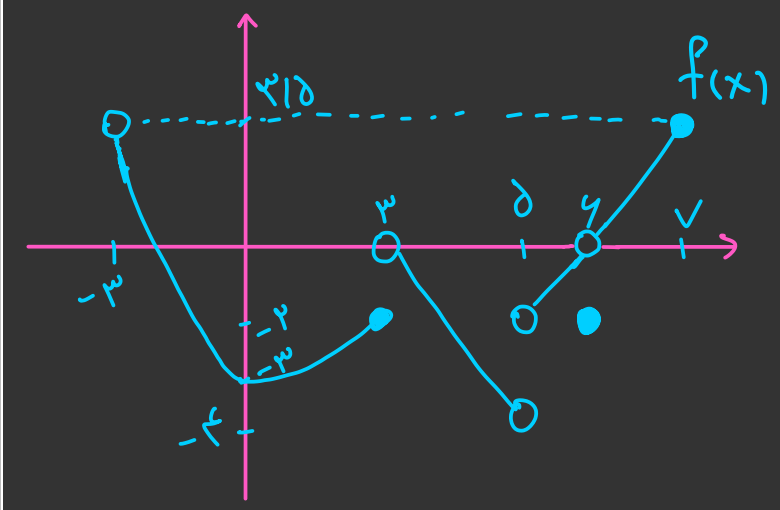
$x=-3$: مقدار = ت ن، $L^+=3/5$، $L^-=$ ندارد، $L=$ ندارد

$x=3$: مقدار $=-2$، $L^+=0$، $L^-=-2$، $L=$ ندارد

$x=5$: مقدار = ت ن، $L^+=-2$، $L^-=-4$، $L=$ ندارد

$x=6$: مقدار $=-2$، $L^+=0$، $L^-=0$، $L=0$

$x=7$: مقدار $=3/5$، $L^+=$ ندارد، $L^-=3/5$، $L=$ ندارد



$\lim f(x-۲)$: $\lim f(x-۲) = \lim f(0) = \lim_{x \to ۳^-} f(x) = -۲$

$x+۲ \longrightarrow ۷^-$ $\quad x-۲ \longrightarrow ۳^-$ $\quad 0 \longrightarrow ۳^-$

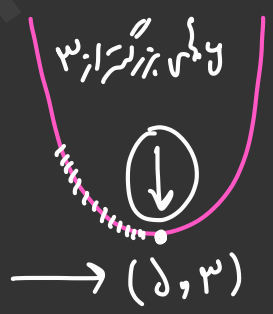
$x+۲ \longrightarrow ۷^-$ $\quad x+۲ < ۷$ $\quad x < ۵$ $\quad x-۲ < ۳$

$x-۲ \longrightarrow ۳^-$

$\lim f(x^۲ - ۱۰x + ۲۸)$: $\quad x+۱ < ۶$ $\quad x < ۵$ $\quad x \longrightarrow ۵^-$

$x+۱ \longrightarrow ۶^-$

$\lim_{x \to ۵^-} (x^۲ - ۱۰x + ۲۸) = ۳^+$

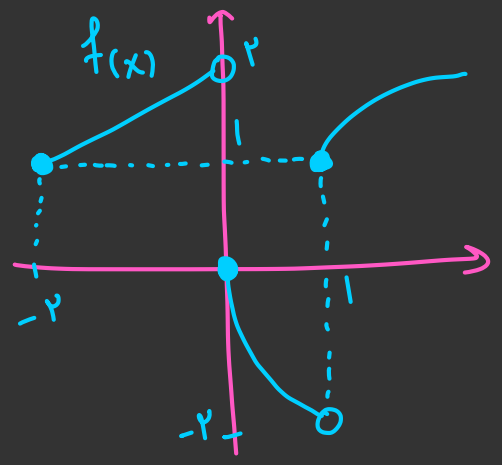


یعنی : $x^۲ - ۱۰x + ۲۸ \longrightarrow ۳^+$

جواب $= \lim_{x \to ۵^-} f(x^۲ - ۱۰x + ۲۸) = \lim_{x^۲ - ۱۰x + ۲۸ \to ۳^+} f(x^۲ - ۱۰x + ۲۸) = \lim_{0 \to ۳^+} f(0)$

$= \lim_{x \to ۳^+} f(x) = 0$ $\quad$ از روی نمودار بالا

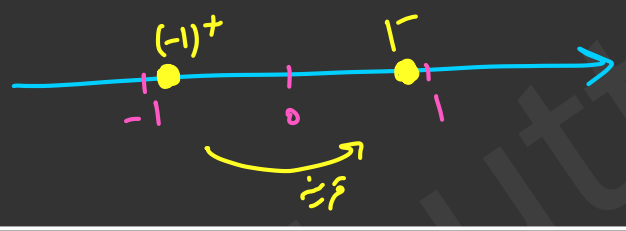
$$\lim_{x\to 3^+} f(x-2) = \lim_{x-2\to 1^+} f(x-2) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$



$$\lim_{x\to (-1)^-} f(-x) = \lim_{-x\to 1^+} f(-x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(1-x) = \lim_{1-x\to 0^+} f(1-x) = \lim_{0\to 0^+} f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(|x|) = \lim_{|x|\to 1^-} f(|x|) = \lim_{0\to 1^-} f(0) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$$

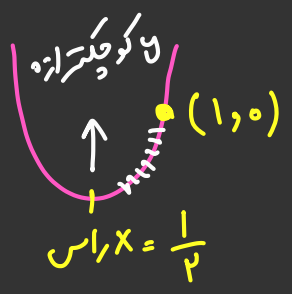


$$\lim_{x\to 4^-} f\left(-\frac{x}{2}\right) = \lim_{\left(-\frac{x}{2}\right)\to (-2)^+} f\left(-\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to (-2)^+} f(x) = 1$$

$x < 4 \qquad -x > -4 \qquad -\frac{x}{2} > -2 \qquad -\frac{x}{2} \to (-2)^+$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x^2-x) = \lim_{x^2-x\to 0^-} f(x^2-x) = \lim_{0\to 0^-} f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} (x^2-x) = 0^+$$



یعنی : $x^2-x \to 0^-$

* بدست آوردن مقدار حد از روی ضابطه : در توابع چند جمله‌ای ، گویا ، مثلثاتی و رادیکالی مقدار تابع با حد برابر است پس برای بدست آوردن حد در نقطه‌ی x_0 کافی است x_0 را در ضابطه جایگذاری کنیم .

$$\lim_{x \to -2} (-2x^3 + x - 5) = -2(-2)^3 + (-2) - 5 = 16 - 2 - 5 = 9$$

$$\lim_{x \to 1} (5x - 1)(3 - x^3) = (5-1)(3-1) = 4 \times 2 = 8$$

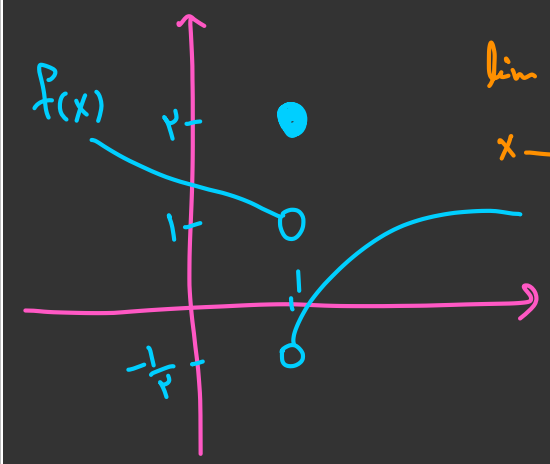
$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{-4 + 6 - 2} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x - 2}{6 - 5x^2} = \frac{-3-2}{6-5} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\log_2(x-1) + x}{3^{-x+4}} = \frac{\log_2 4 + 5}{3^{-5+4}} = \frac{2+5}{3^{-1}} = \frac{7}{\frac{1}{3}} = 21$$

$$\lim_{x \to (-\frac{\pi}{3})^+} \frac{2\cos x - \sin^2 x}{1 + \cos 2x} = \frac{2\cos(-\frac{\pi}{3}) - \sin^2(-\frac{\pi}{3})}{1 + \cos(-\frac{2\pi}{3})} = \frac{2(\frac{1}{2}) - (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{1 + (-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$



$$\lim_{x \to ۱^+} \left(\frac{g(x)}{۲} + ۲ \right) = ۳$$

$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{\sqrt{(-gf)(x)}}{x^۲ - ۲x} = ?$$

$$\lim_{x \to ۲} (f - ۳g) = ۴$$

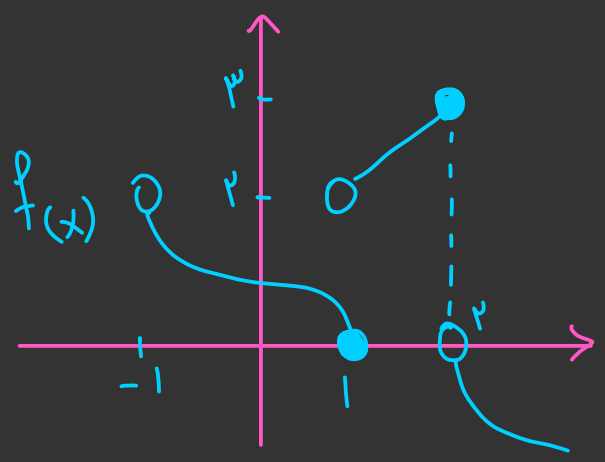
$$\lim_{x \to ۲} (g - ۳f) = ۰$$

$$\lim_{x \to ۲} (f^۲ + g^۲) = ?$$

$$f(x) = \begin{cases} (x+a)^۲ & ; \quad x \geq -۱ \\ ۲x+۱ & ; \quad x < -۱ \end{cases}$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ حد دارد؟

R $\quad \phi \quad \{۲\} \quad \{۰\}$



$$\lim_{x \to ۲^-} f^{-1}(x) = ?$$

مواردی که باید به حد چپ و راست توجه کرد :

۱ شکستگی در نمودار ۲ ریشه‌ی قدر مطلق ۳ ریشه مخرج

۴ صحیح کننده براکت (جزصحیح) ۵ تابع چند ضابطه‌ای (نقطه‌ی شکست)

---

* در حدهای شامل قدر مطلق و جزصحیح : ابتدا باید تکلیف قدر مطلق و جزصحیح را مشخص کنیم :
داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم و خودش یا قرینه‌اش را از قدر بیرون می‌آوریم.
و به جای جزصحیح عدد می‌گذاریم یعنی x_0 را جایگذاری کرده و متغیر از بین می‌رود. (توجه به مثال‌ها)

$$\lim_{x \to \frac{۳}{۲}} \frac{|x^۲ - ۳x + ۲|}{x+1} =$$

$$\lim_{x \to ۳} \frac{|x^۲ - ۳x + ۲|}{x+۱} =$$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{|x^۲ - ۳x + ۲|}{x-۱} =$$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{|x^۲ + ۳x - ٤|}{x^۲ - ۱} =$$

$$\lim_{x \to ۴^+} \frac{|۳x - x^۲| - x}{|x-۴|} =$$

اختلاف حد چپ و راست تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ در $x=1$ چقدر است؟

اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{m-x}{3x-1} & x<1\\[2ex] \dfrac{x^2-x}{|x^2-4x+3|} & x>1\end{cases}$ در $x=1$ حد داشته باشد، آنگاه حد تابع $f(x)$ در $x=\frac{2}{3}$ را بدست آورید.

اگر $f(x)=\begin{cases}3x^2-5 & x\in Z\\ 2x-3 & x\notin Z\end{cases}$ آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)+\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{19}{4}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{95}{4}$

$$\lim_{x \to ۳} [x] =$$

$$\lim_{x \to \frac{۵}{۲}} [x] =$$

$$\lim_{x \to ۹^-} (x+1)\left[\frac{x-1}{۴}\right] =$$

$$\lim_{x \to \sqrt{۲}} [۵ - x^۲] =$$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{3}\right)^+} \left[\frac{2}{x}\right] =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} [\sin 2x]$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} [2\cos 2x]$$

$$\lim_{x \to ۰} \left(x^{۲} - [x^{۲} - ۱] - ۱ \right)$$

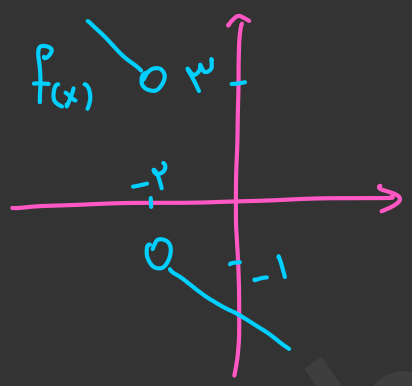
$$\lim_{x \to ۳} [x^{۲} - ۳x + ۲]$$

$$\lim_{x \to ۰} [x^{۲} - ۵x + ۳] =$$

$$\lim_{x \to ۲} [x^{۲} - ٤x + ۱]$$

$$\lim_{x \to -3} [-x^2 - 6x + 2] =$$

حد تابع $f(x) = a[-2x] + b[x]$ در $x = -2$ برابر ۳ باشد، $a - 2b$ را بدست آورید.



$$\lim_{x \to (-2)^+} [f(x)] + \lim_{x \to (-2)^-} [f(x)] =$$

$$\lim_{x \to 2} (3x - 6)\left[\frac{x}{2} + 1\right]$$

اگر $f(x) = (-x^2 + ax - b)[3x]$ در $x = \frac{1}{3}$ و $x = 1$ حد داشته باشد، حد راست تابع $f(x)$ در $x = -1$ را بدست آورید.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{[x] - |x|}{|2x| - [2x]} =$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x|^2 - 2x}{[x] - x} =$$